

W1 Allgemeine Gasgleichung

27. Mai 02

Protokollanten: Malte Renius
Inga Zeisberg

Versuch W 1:

Allgemeine Gasgleichung

1. Theorie zur allgemeinen Gasgleichung

Viele Eigenschaften von Gasen lassen sich anhand des Modells des idealen Gases beschreiben. Dieses beschreibt den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur. Bei realen Gasen weicht der Zusammenhang der drei Zustandsgrößen von der allgemeinen Gasgleichung ab, diese Abweichung ist jedoch bei kleinem Druck und hoher Temperatur vernachlässigbar.

1.1 Temperatur und Temperaturskalen

Die Temperatur einer Materiemenge ist ein Maß für die Bewegungsenergie seiner Moleküle. Da sie einen Zustand unabhängig von seiner Masse und stofflichen Zusammensetzung beschreibt, wird sie als Zustandsgröße bezeichnet. In einem idealen Gas ist dabei die mittlere kinetische Energie proportional zur Temperatur.

Als Einheit für die Temperatur wird in der Physik meist Kelvin verwendet: 1 Kelvin (1K) ist der 273,16te Teil der Temperatur des Wassers am Tripelpunkt. Der Zahlenwert folgt aus der früher festgelegten Celsius-Skala, bei der Schmelzpunkt durch den Nullpunkt und Siedepunktes mit 100°C definiert ist. In beiden Skalen haben Temperaturdifferenzen die gleichen Skalenwerte, d.h. 1 Kelvin Temperaturunterschied ist genauso groß wie 1°C Temperaturunterschied. Die Skalen unterscheiden sich lediglich durch den Nullpunkt, wodurch sich folgende Beziehung zwischen der Temperatur in Kelvin T und der Temperatur in Celsius ϑ ergibt:

$$T = T_0 + \vartheta \quad (1)$$

T_0 ist die Temperatur des Schmelzpunktes von Wasser ($\vartheta = 0^\circ\text{C}$) in Kelvin.

1.2 Gasgesetze

Man geht von einer festen Gasmenge aus, die bei $T_0 = 0^\circ\text{C}$ das Volumen V_0 und den Druck p_0 hat. Da Druck und das Volumen einer Gasmenge unabhängige Größen sind, werden sie Zustandsgrößen genannt. Wenn man eine Zustandgröße einer Gasmenge verändert, muss die Abhängigkeit von den jeweils anderen Größen berücksichtigt werden.

1. Gay-Lussacsches Gesetz (Volumenänderung bei konstant gehaltenem Druck):

$$V(\vartheta) = V_0(1 + \alpha\vartheta) \quad \text{für } p = \text{const.} = p_0 \quad (2)$$

2. Gay-Lussacsches Gesetz (Druckänderung bei konstant gehaltenem Volumen):

$$p(\vartheta) = p_0(1 + \gamma\vartheta) \quad \text{für } V = \text{const.} = V_0 \quad (3)$$

Boyle-Mariottesches Gesetz (konstantes Produkt aus Druck und Volumen bei konstanter Temperatur):

$$p \cdot V = \text{const.} \quad \text{für } \vartheta = \text{const.} \quad (4)$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient und der Spannungskoeffizient sind gleich groß. Der gemeinsame Wert ist für die meisten Gase, insbesondere bei höheren Temperaturen, gleich:

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{273,15} K^{-1} = \frac{1}{T_0} \quad (5)$$

Wenn man Gleichung (5) in (2) und (3) einsetzt, und dabei die Celsius-Skala durch die Kelvinskala ersetzt ($\vartheta = T - T_0$), erhält man folgende Gleichungen:

$$V(T) = V_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{für } p = \text{const.} = p_0 \quad (6)$$

$$p(T) = p_0 \frac{T_0}{T} \quad \text{für } V = \text{const.} = V_0 \quad (7)$$

Die graphische Darstellung von diesen beiden Gay-Lussacschen ergibt jeweils eine Gerade durch den Nullpunkt, während das Boyle-Mariottesche Gesetz (4) eine Hyperbel ergibt.

Die drei Gesetze lassen sich zusammenfassen, allerdings ist aufgrund der gegenseitigen Abhängigkeit der drei Größen p , V und T nicht durch formales Einsetzen möglich.

Wenn man das Gas aus einem Zustand p_0, V_0, T_0 in einen anderen Zustand überführen will, so sind von den Zustandsgrößen zwei frei wählbar. Wenn man beispielsweise für den Endzustand einen bestimmten Druck und ein bestimmtes Volumen festlegt, so kann eine isotherme Zustandsänderung nur mit einer der beiden Größen erfolgen. Wenn das Volumen V erreicht wird, ergibt sich aus (4) folgende Gleichung:

$$p_0 \cdot V_0 = p' \cdot V \quad (8)$$

Der Druck p' ist dabei nicht zu verwechseln mit dem letztendlichen Druck p , der erst nach Einstellung der Temperatur eintritt:

$$p = p' \cdot \frac{T}{T_0} \quad (9)$$

Setzt man p' von (8) in (9) ein, so erhält man

$$p = \frac{p_0 \cdot V_0}{V} \cdot \frac{T}{T_0} \rightarrow \frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} \quad (10)$$

Das Verhältnis dieser allgemeinen Gasgleichung ist abhängig von der Stoffmenge (Anzahl der Teilchen). Für ein Mol gilt:

$$\frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = R = 8,31 \frac{J}{K \cdot mol} \quad (11)$$

Für ein Gas mit der Teilchenmenge ν Mol gilt folglich:

$$p \cdot V = \nu RT \quad (12)$$

2. Versuche

2.3. Bestimmung des Spannungskoeffizienten γ

Mittels eines Jollyschen Gasthermometers werden die Druckverhältnisse einer Gasmenge untersucht, deren Volumen bei Erwärmung und Auskühlen konstant gehalten wird. Aus der Kennlinie lässt sich der Spannungskoeffizient γ ermitteln.

Tabelle der gemessenen und daraus ermittelten Werte:

Erwärmungsprozess			
Temperatur (°C)	Hg-Säule (mm)	Δh (mm)	Gesamtdruck (Pa)
21,0	540	0	100100
30,0	565	25	103425
40,0	590	50	106750
46,4	603	63	108479
51,0	615	75	110075
57,7	630	90	112070
66,3	650	110	114730
70,7	660	120	116060
80,1	675	135	118055
85,3	695	155	120715
87,7	700	160	121380
92,5	720	180	124040
98,3	725	185	124705
Abkühlungsprozess			
97,4	727	187	124971
92,5	717	177	123641
88,1	700	160	121380
85,2	695	155	120715
79,5	680	140	118720
76,9	676	136	118188
72,9	667	127	116991
68,7	657	117	115661
65,1	647	107	114331
61,9	640	100	113400
55,1	625	85	111405
49,3	612	72	109676
45,1	600	60	108080
41,7	590	50	106750
38,6	585	45	106085
35,8	578	38	105154
30,6	566	26	103558
24,0	549	9	101297
19,8	542	2	100366

Der Gesamtdruck ist die Summe aus dem Atmosphärendruck, der mit $1001\text{hPa} \pm 1\text{hPa}$ gemessen wurde (Die Toleranz des Wertes stellt keine Messunsicherheit dar, sondern berücksichtigt die Schwankung des Atmosphärendrucks während des Experiments) und von Druck, der mittels der Quecksilbersäule abgelesen wurde. 1mm Quecksilbersäule entspricht dabei einem Torr, ein Torr ist 133 Pascal (Pa).

Die Formel für den Gesamtdruck ist also $p_{ges} = p_{atmosphäre} + \Delta h \cdot \frac{133 Pa}{mm}$

Für die Werte ergeben sich folgende Toleranzen:

$\pm 1^\circ\text{C}$ für die Temperatur aufgrund des recht ungenauen Thermometers und des Umstandes, dass dieses nicht im Gas, sondern in der umgebenden Flüssigkeit die Temperatur misst.

$\pm 1\text{mm}$ für die Quecksilbersäule. Hieraus resultiert eine Toleranz von ± 1 Torr bzw. ± 133 Pa für den Druck. Beim Gesamtdruck wird hieraus eine Toleranz von Toleranz 133 Pa, zu denen noch eine Toleranz von knapp 100 Pa des Außendrucks hinzukommt. Es wurde insgesamt eine Toleranz von 200 Pa angesetzt. Wie aus den Fehlerbalken in Diagramm 1 und 2 abzulesen, ist diese relativ klein gegen die Toleranz der Temperatur.

Der Wert für p_0 lässt sich graphisch ermitteln (Druck bei 0°C). Er liegt sowohl für im Diagramm für das Abkühlen als auch im Diagramm für das Erwärmen bei $94500\text{ Pa} \pm 500\text{ Pa}$.

Für γ ergibt sich aus (3):

$$\gamma = \frac{p(\vartheta) - p_0}{\vartheta p_0} = \frac{125500\text{ Pa} - 94500\text{ Pa}}{100^\circ\text{C} \cdot 94500\text{ Pa}} = \frac{1}{304,8} \text{ K}^{-1}$$

Der Kehrwert von γ liegt etwas mehr als 10% über dem realen Wert für den absoluten Nullpunkt (siehe gestrichelte Kennlinie im Diagramm). Die Messunsicherheit aller beteiligten Größen ist jedoch jeweils nicht größer als 1%, so dass nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz eine Messunsicherheit des Wertes für γ unterhalb von 2% anzunehmen wäre.

Die tatsächliche Abweichung lässt sich z.T. durch Messfehler erklären: Die Ausdehnung des Glaskolbens dürfte dabei eine untergeordnete Rolle spielen. Als wichtigere Ursache der Verfälschung ist die Abkühlung des Gases jenseits der eingetauchten Glaskugel anzunehmen; dies ist wohl einer der Hauptgründe für das Abflachen der Kurve.

Die große Abweichung kann jedoch auch ein Indiz dafür sein, dass sich das Gasgemisch der Luft bei Temperaturen um 300K eben nicht so exakt wie angenommen den

Volumenausdehnungskoeffizienten $\frac{1}{T_0}$ hat.

2.3. Bestimmung der Dichte eines Balsaholzstückchens

Zur Bestimmung der Dichte ist die Messung von Gewicht und Volumen des Holzstückes notwendig. Das Gewicht wird mittels einer Waage gemessen: $m=2,08\text{g}\pm 0,01\text{g}$

Unter der Annahme, dass sich das Holzstück bei geringen Unterdrücken nicht verformt, kann mittels des Jollyschen Gasthermometers das Volumen gemessen werden, indem man das Kolbenvolumen mit und ohne das Holzstück misst. Die Differenz der Volumina entspricht dem Volumen des Holzstücks.

Am Gasthermometer wurden folgende Werte abgelesen:

Messwerte ohne Holzstück	
ΔV (ml)	h (mm)
0,0	566
0,5	557
1,0	544
1,5	534
2,0	525
2,5	517
3,0	507
3,5	499
4,0	489
4,5	481
5,0	472
5,5	464
6,0	455
6,5	448
7,0	438
7,5	429

Messwerte mit Holzstück	
ΔV (ml)	h (mm)
0,0	567
0,5	557
1,0	546
1,5	531
2,0	522
2,5	511
3,0	498
3,5	488
4,0	477
4,5	467
5,0	457
5,5	447
6,0	436
6,5	426
7,0	415

Aufgrund der Skalen ergeben sich die Messunsicherheit von $\pm 0,1$ ml für das Volumen und ± 1 mm für die Säulenhöhe.

Aus dem Boyle-Mariotteschen Gesetz (4) lassen sich die Volumina errechnen. Dazu wird es wie folgt umgeschrieben:

$$V = V_K + \Delta V = \frac{\text{const.}}{p} \quad \text{bzw.} \quad \Delta V = \text{const} \cdot \frac{1}{p} - V_K$$

Die Kolbenvolumina lassen sich nun aus dem Diagramm 3 und ablesen, in denen ΔV gegen $1/p$ angetragen wurde. Der Wert für $1/p$ wurde dabei wie folgt errechnet:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\Delta h \cdot \frac{133 \text{ Pa}}{\text{mm}} + 101500 \text{ Pa}}$$

101500 Pascal ist dabei der für diese Messung festgestellte Atmosphärendruck.

Für die Diagramme ergeben sich folgende Steigungen:

- $-1,86 \cdot 10^{-7} \pm 2\%$ für den Kolben ohne Holzstück: Die Steigungsgerade schneidet also den Nullpunkt bei $V_{\text{ohne}} = 52,4 \text{ ml} \pm 5\%$
- $-2,37 \cdot 10^{-7} \pm 2\%$ für den Kolben mit Holzstück: Die Steigungsgerade schneidet also den Nullpunkt bei $V_{\text{mit}} = 41,5 \text{ ml} \pm 5\%$

Die Differenz der Volumina V_{ohne} und V_{mit} ergibt das Volumen des Balsaholzstückchens:

$$V_{\text{Balsa}} = 10,9 \text{ ml} \pm 7\%$$

Zu den Messunsicherheiten: Die Unsicherheiten sind nur approximativ anzugeben. Da der Messfehler für die Werte $\frac{1}{p}$ mit einer Unsicherheit von 1% versehen wurden (entspricht etwa $\pm 100\text{Pa}$ für die Werte von p), ergeben sich im Diagramm recht große Toleranzen. Die Toleranz von 5% für die Steigung ist somit angemessen. Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt sich aufgrund der Verrechnung der beiden Volumina eine Messunsicherheit von $u_{ges} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(0,05)^2 + (0,05)^2} \approx 0,07$.

Für die Dichte des Balsaholzstückes ergibt sich somit der Wert $\frac{2,08\text{g}}{10,9\text{cm}^3} = 0,19 \text{g/cm}^3 \pm 5\%$.

Die Messunsicherheit der Wägung konnte vernachlässigt werden.

Für die Dichte fanden sich im Internet Angaben zwischen $0,1 \text{g/cm}^3$ und $0,25 \text{g/cm}^3$ (http://www.tischlerei-ort.de/knowhow/ho_la_b1.html).

Diagramm 1: Druck-Temperatur-Kennlinien des Jollyschen Gasthermometers beim Erwärmen

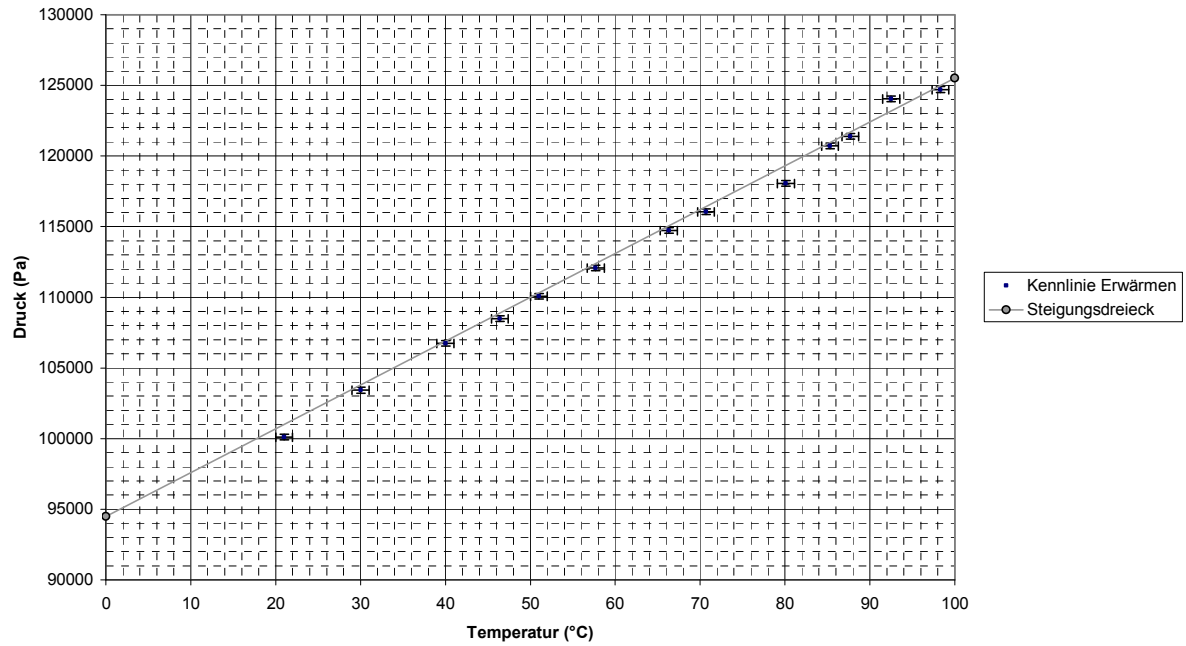


Diagramm 2: Druck-Temperatur-Kennlinien des Jollyschen Gasthermometers beim Abkühlen

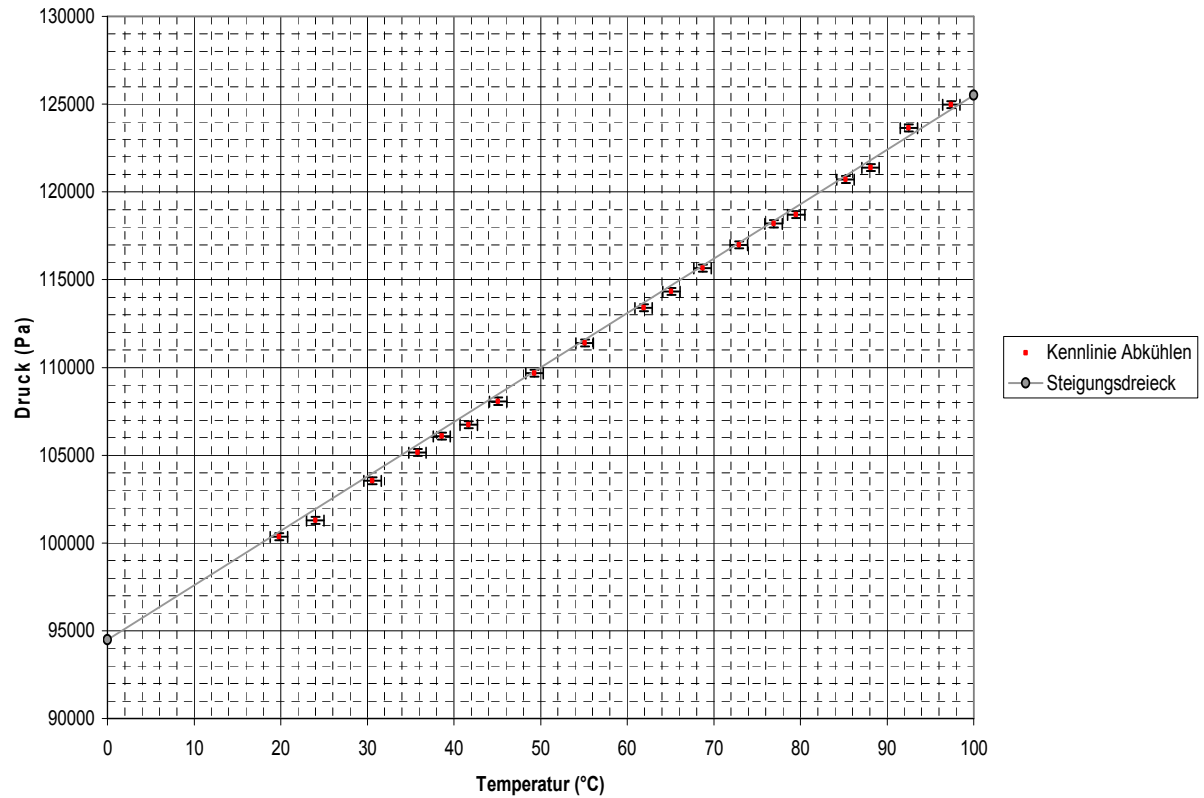


Diagramm 3: Kennlinien Volumenänderung-Quecksilbersäule ohne Balsaholzstück

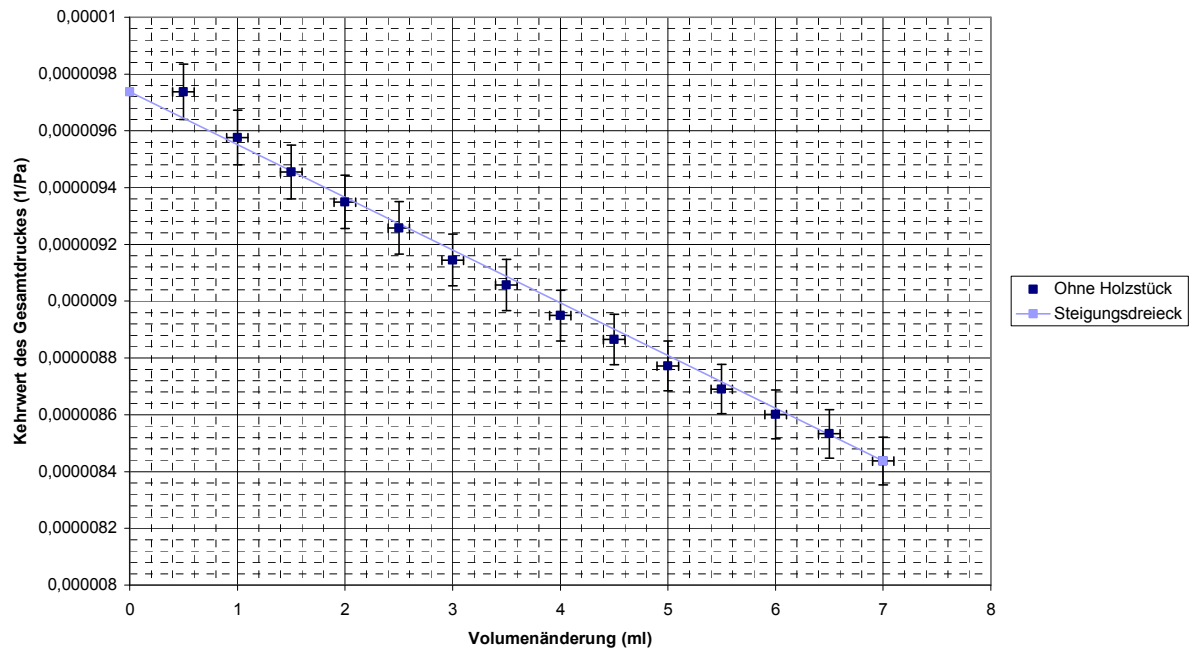


Diagramm 4: Kennlinien Volumenänderung-Quecksilbersäule mit Balsaholzstück

