

Versuch M6: Kreisel

5. Februar 02

Protokollanten: Malte Renius
Inga Zeisberg

Versuch M6:

Kreisel

1. Theorie des schweren symmetrischen Kreisels

In dem Versuch wird ein Kugelkreisel mit eingeschraubter Stange verwendet, dessen Figurachse gegen aus der Vertikale ausgelenkt wird. Da der Kugelkreisel in einem festen Punkt unterstützt wird, der nach der Auslenkung nicht mehr mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, wirkt auf den Kreisel, bedingt durch die Gravitation ein Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{a} \times m\vec{g} \quad [1]$$

Dabei ist \vec{a} der Vektor vom Unterstützungspunkt zum Schwerpunkt. Da sich \vec{a} zeitlich verändert, ist die Änderung des Drehmomentes nicht konstant. Der Drehimpuls ändert sich fortlaufend: $d\vec{L} = \vec{M}dt$

Die Drehimpulsachse weicht der Gravitationsachse aus diesem Grund senkrecht aus. Das tangentielle Drehmoment bewirkt dabei eine kegelförmige Bewegung des Kreisels, deren Kreisfrequenz sich wie folgt ermitteln lässt:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad [2]$$

Da für $d\varphi$ gilt

$$d\varphi = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|\sin\vartheta} \quad [3]$$

erhält man durch einsetzen in [3]:

$$\Omega = \frac{\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right|}{|\vec{L}|\sin\vartheta} \quad [4]$$

Da die zeitliche Ableitung nach dem Drehimpuls \vec{L} gleich dem Drehmoment \vec{M} ist, gilt

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|\sin\vartheta} \quad [5]$$

Das Drehmoment $|\vec{M}|$ ist nach [1] $amg \sin\vartheta$ und das der Betrag des Drehmomentes als Produkt von Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment definiert, daher folgt

$$\Omega = \frac{amg}{J\omega} \quad [6]$$

2. Durchführung des Versuchs

2.1 Bestimmung des Drehmomentes amg für $\theta = 90^\circ$

Zunächst wird das Trägheitsmoment der drei Stellungen gemessen. Dies geschieht auf die in der Anleitung vorgeschriebene Weise mit einem Newtonmeter. Als Hebellänge wurden hierbei $11,9 \pm 0,1$ cm gemessen.

- Messung Stellung 1: $120\text{N}^{-3} \pm 10\% \Rightarrow 14,3 \text{ Nm} \pm 10\%$
- Messung Stellung 2: $170\text{N}^{-3} \pm 10\% \Rightarrow 20,2 \text{ Nm} \pm 10\%$
- Messung Stellung 3: $85 \pm 10\text{N}^{-3} \pm 10\% \Rightarrow 10,1 \text{ Nm} \pm 10\%$

Die Messunsicherheit ergibt sich aufgrund der Skalierung des Newtonmeters und der nicht genau feststellbaren waagerechten Lage des Stabes. Der hinzukommende Messunsicherheit durch die Längenmessung wurde vernachlässigt ($< 1\%$).

2.2 Rechnerische Bestimmung des Trägheitsmomentes der Kugel

Das Trägheitsmoment einer Kugel beträgt $J_{Kugel} = \frac{2}{5}mr^2$.

Für die Kugel im Experiment wurden folgende Werte ermittelt: $m = 514,5 \pm 1$ g;
 $r = d/2 = (5,07 \pm 0,01 \text{ cm})/2$. Hieraus ergibt sich ein rechnerisches Trägheitsmoment von $1322 \pm 5 \text{ gcm}^2$ (Die Messungenauigkeiten wurden addiert).

Die Addition des Trägheitsmomentes des Stabes (15 gcm^2) ergibt $1337 \pm 5 \text{ gcm}^2$.

2.3 Messung der Kreisfrequenz und Präzessionszeit

Die Messung der Kreisfrequenz des Kreisels mittels Stroboskop¹ und der Präzessionszeit mittels Stoppuhr ergab folgende Werte:

Messung 1		Messung 2		Messung 3	
Präzessionszeit ΔT_P [s]	Kreisfrequenz ω [s ⁻¹]	Präzessionszeit ΔT_P [s]	Kreisfrequenz ω [s ⁻¹]	Präzessionszeit ΔT_P [s]	Kreisfrequenz ω [s ⁻¹]
15,0±0,5	445±10	6,5±0,5	178±10	5,6±0,5	157±10
20,2±0,5	429±10	9,5±0,5	261±10	14,0±0,5	272±10
11,4±0,5	314±10	13,3±0,5	345±10	11,1±0,5	230±10
16,8±0,5	392±10	14,3±0,5	376±10	9,5±0,5	209±10
24,3±0,5	523±10	15,2±0,5	408±10	17,0±0,5	293±10

Die Messunsicherheit für T_P liegt in dem problematischen Abmessen der Präzessionszeit begründet. Die Kreisfrequenz ω konnte nur unzureichend während der Messung der Präzessionszeit konstant gehalten werden.

Für die Anstiege $\Delta T_P / \Delta \omega$ ergeben sich aus den Diagrammen durch eine Steigungsgerade folgende Werte:

- Messung 1: $0,0714\text{s}^2 \pm 10\%$
- Messung 2: $0,0375\text{s}^2 \pm 10\%$
- Messung 3: $0,0833\text{s}^2 \pm 10\%$

Die Messunsicherheit für die Werte ist schwer anzugeben, da in Diagramm 1 und Diagramm 3 einige Messwerte mit ihren Toleranzen außerhalb der Geraden liegen.

Angesichts dieser auftretenden Messfehler wurde eine recht hohe Messunsicherheit von 10% angesetzt.

¹ Die auf dem Stroboskop angegebene Frequenz wurde durch 60sek geteilt (Blitze pro Minute) und mit 2 Pi multipliziert (Kreisfrequenz).

2.4 Ermittlung des Trägheitsmomentes mittels der Messwerte

Durch Umstellung von Gleichung 6 kann man das Trägheitsmoment aus dem Verhältnis der von der in 2.1 ermittelten Hebelkraft und den Verhältnis $\Delta T_p / \Delta \omega$ ermitteln:

$$J = \frac{amg}{\frac{2\pi\omega}{T_p}} \quad [7]$$

In Diagramm 4 wurde anstelle einer Steigungsgerade nur der in 2.2 errechnete Wert für das Trägheitsmoment als gerade eingezeichnet (die Messunsicherheit des errechneten Wertes wurde nicht eingezeichnet, da $<1\%$). Die Werte liegen überraschend genau auf der Gerade, nur die zweite Messung divergiert leicht, liegt jedoch noch innerhalb der Toleranz.

Diagramm 1
Kennlinie Messung 1 - Präzessionszeit gegen Kreisfrequenz

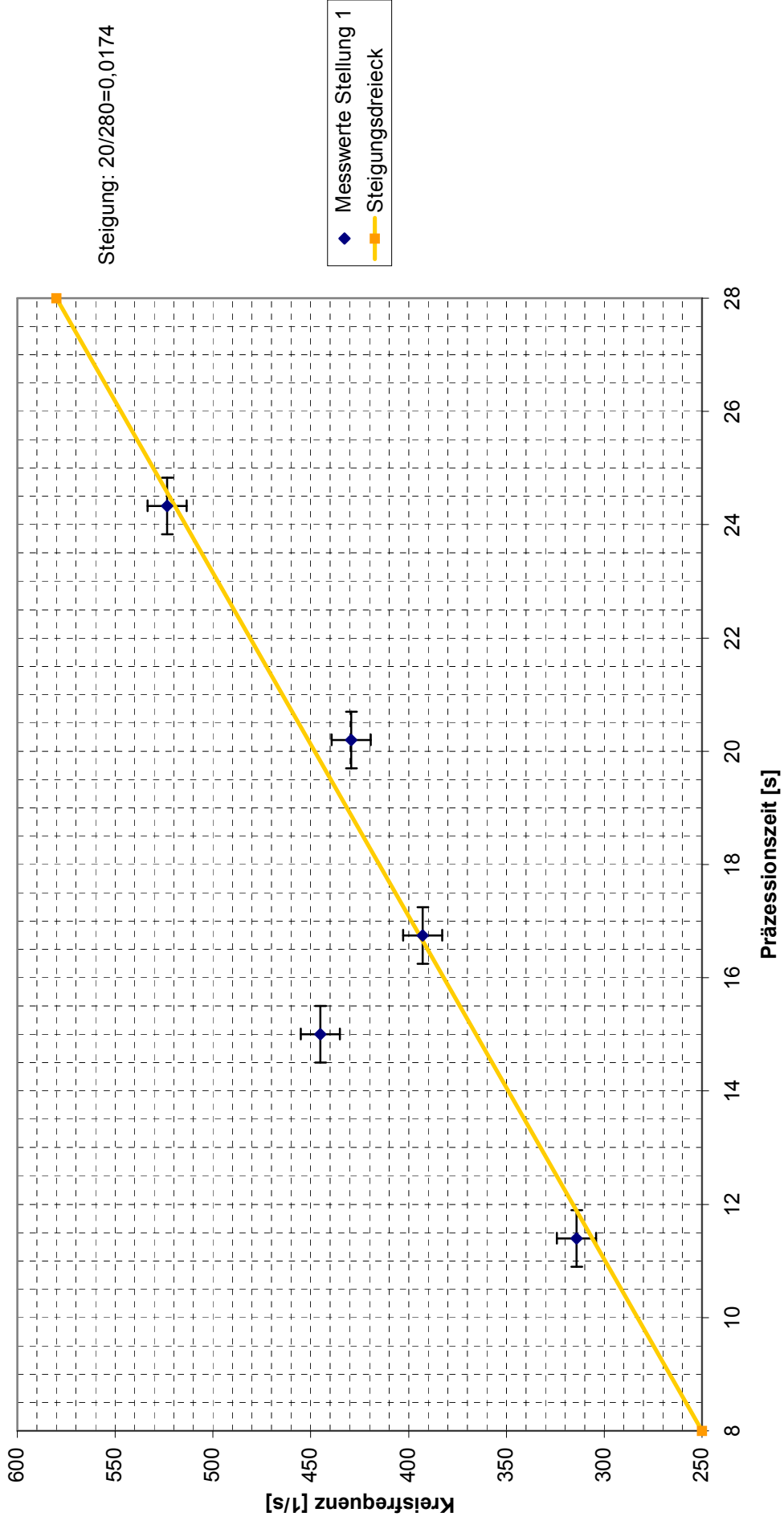


Diagramm 2
Kennlinie Messung 2 - Präzessionszeit gegen Kreiselfrequenz

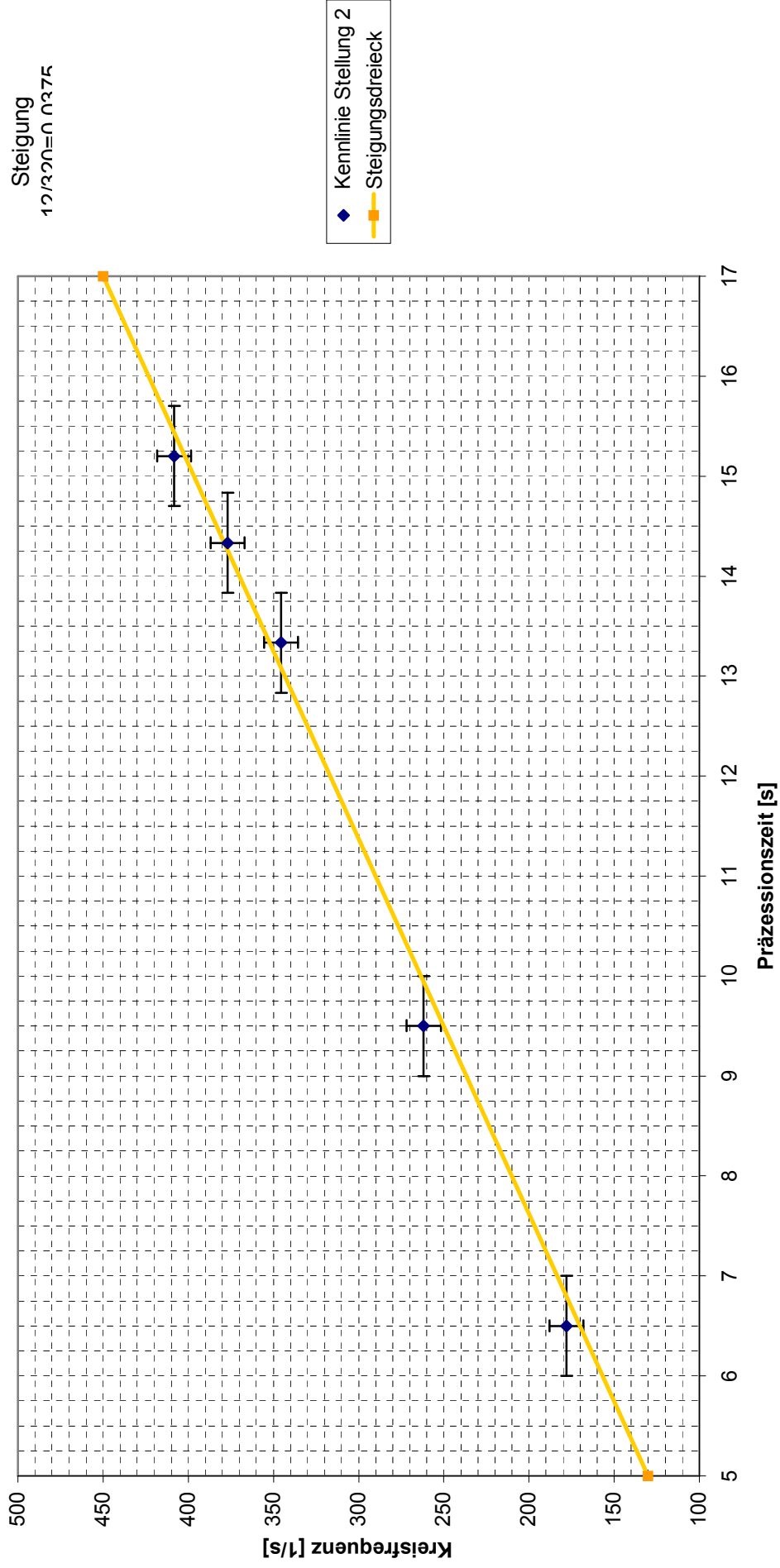


Diagramm 3
Kennlinie Messung 3 - Präzessionszeit gegen Kreiselfrequenz

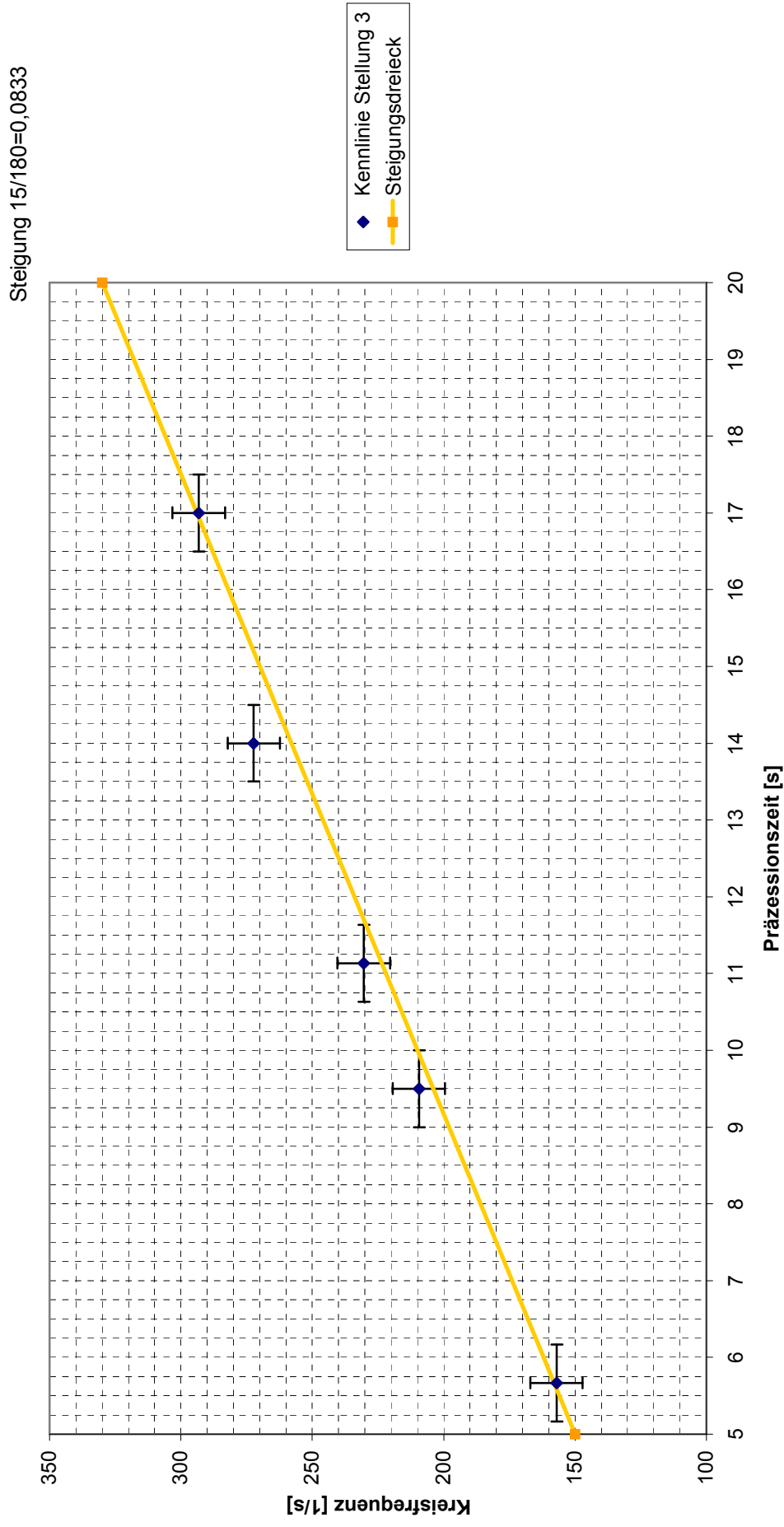


Diagramm 4
Vergleich Kennlinie Drehmoment gegen Frequenzbeschleunigung mit angenommenen Trägheitsmoment

