Versuch M2: Gekoppelte Pendel 8. Januar 02

Protokollanten: Malte Renius

Inga Zeisberg

Versuch M2:
Gekoppelte Pendel

1. Theorie der Bewegung gekoppelter Pendel

Bei dem Versuch wird das von Pendeln untersucht, die in einer Ebene schwingen und mit einer Feder aneinander gekoppelt sind, d.h. in einer gewissen Höhe der Pendelstäbe sind beide Pendel miteinander durch eine Feder verbunden, die Wechselwirkungen zwischen den beiden Schwingungen erzeugt, deren Art und Weise im folgenden untersucht werden.
Für den Versuch werden Pendel gleicher Länge und Masse ausgewählt, d.h. sie besitzen die gleiche Eigenfrequenz. Zudem wird für den Auslenkwinkel φ ein so kleiner Wert angenommen, dass die Näherung

$$\sin\varphi \approx \varphi \qquad [1]$$

angewendet werden kann. Die Auslenkung des Pendels wird mit dem horizontalen Abstand von der Nulllage definiert (Näherung $x \approx L\varphi$).
Auf die Pendel wirken zwei Kräfte: Die Gravitationskraft, deren radialer Anteil für die freie Pendelschwingung maßgeblich ist, und zusätzlich zu dieser die Kraft der Feder am Pendelstab, die von der Auslenkung der beiden Pendel abhängt.
Der radiale Teil der Gravitationskraft ist

$$F_\varphi = -mg\sin\varphi \qquad [2]$$

bzw. infolge der obigen Vereinfachung [1]

$$F_\varphi = -mg\varphi$$

1.1. Zeitliches Verhalten der Pendel

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung erhält man

$$ma = F\,;\quad a = \ddot{x} = L\ddot{\varphi} \;\Rightarrow\; mL\ddot{\varphi} = -mg\varphi \qquad [3]$$

oder mit der Auslenkung x: $m\ddot{x} = -\frac{mg}{L}x$ [4].

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung liefert für die Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad [5].$$

Dadurch lässt sich die Differentialgleichung wie folgt umformen

$$m\ddot{x} + m\omega_0^{\,2}x = 0 \qquad [6]$$

Wenn man den Term für den über die Feder übertragene Kraft des anderen Pendels hinzufügt, ergeben sich folgende Gleichungen (x für die Auslenkung des 1. Pendels, y für die des 2. Pendels):

$$m\ddot{x} + Dx + k(x-y) = 0 \qquad [7]$$

$$m\ddot{y} + Dy + k(y-x) = 0 \qquad [8]$$

Wenn man nun die Differentialgleichungen über den Ansatz $x = Ae^{i\omega t}$, $y = Be^{i\omega t}$ löst, erhält man folgende Gleichungen:

$$\left(-m\omega^2 + m\omega_0^{\ 2} + k\right)A = kB \qquad [9]$$

$$\left(-m\omega^2 + m\omega_0^{\ 2} + k\right)B = kA \qquad [10]$$

Durch Division der beiden Terme mit –m erhält man:

$$\left(\omega^2 - m\omega_0^{\ 2} - \frac{k}{m}\right)A = -\frac{k}{m}B \qquad [11]$$

$$\left(\omega^2 - m\omega_0^{\ 2} - \frac{k}{m}\right)B = -\frac{k}{m}A \qquad [12]$$

Wenn man die beiden Gleichungen miteinander multipliziert, kürzt sich AB heraus und zwei quadratische Gleichungen entstehen:

$$\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2} - \frac{k}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{m}\right)^2 \qquad [13]$$

Durch ziehen der Wurzel ergeben sich zwei mögliche Lösungen:

$$\omega_1^{\ 2} = \omega_0^{\ 2} + 2\frac{k}{m} \qquad [14]$$

$$\omega_2^{\ 2} = \omega_0^{\ 2} \qquad [15]$$

Durch Einsetzen erhält man:

[14] in [11]: $A = -B$ [16]

[15] in [11]: $A = B$ [17]

Die beiden verschiedenen Lösungen stehen für die symmetrische Schwingung ($\omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} + 2\frac{k}{m}}$) und die antisymmetrische Schwingung (ω_0).

Die allgemeinen Lösungen lauten im Komplexen:

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + Ae^{i\sqrt{\omega_0^{\ 2} + 2\frac{k}{m}}t} \qquad [18]$$

$$y = Ae^{i\omega_0 t} - Ae^{i\sqrt{\omega_0^{\ 2} + 2\frac{k}{m}}t} \qquad [19]$$

Ins Reelle übertragen lauten die Lösungen:

$$x = A\left(\cos\omega_0 t + \cos\sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}t\right) \qquad [20]$$

$$y = A\left(\cos\omega_0 t - \cos\sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}t\right) \qquad [21]$$

Aus [20] und [21] ergeben sich anhand der trigonometrischen Sätze:

$$x = 2A\left[\cos\left(\frac{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right)\right] \qquad [22]$$

$$y = 2A\left[\sin\left(\frac{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right)\right] \qquad [23]$$

Wenn man $2\frac{k}{m}$ als klein annimmt, so ist jeweils

$$\cos\left(\frac{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right) \text{ und } \sin\left(\frac{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right) \Rightarrow T_S = \frac{4\pi}{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}} \qquad [23a]$$

relativ klein. Sie modulieren die Scheitelwerte der Pendelausschläge, d.h. sind für die Schwebung verantwortlich. Die Terme

$$\cos\left(\frac{\omega_0 t + \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right) \text{ und } \sin\left(\frac{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}}{2}t\right) \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^{\,2} + 2\frac{k}{m}}} \qquad [23b]$$

verändern sich hingegen zeitlich schneller.

1.2 Der Kopplungsgrad

1.2.1 Statische Definition

Der statische Kopplungsgrad wird ermittelt, indem man das Pendel P_x auslenkt und die resultierende Auslenkung an P_y misst. Der Kopplungsgrad ist der Quotient der beiden Auslenkungen:

$$K = \frac{y}{x} \qquad [24]$$

Es gilt in diesem Fall:

$$m\ddot{y} = 0 = -Dy - k(y-x) \Rightarrow y = \frac{kx}{D+K} \qquad [25]$$

Aus [24] und [25] ergibt sich:

$$K = \frac{y}{x} = \frac{k}{D+k} \qquad [26]$$

1.2.2 Dynamische Definition

Der Kopplungsgrad kann auch dynamisch, also aus dem Verhältnis der Frequenzen, hergeleitet werden:

$$m\omega_0{}^2 = m\frac{g}{L} + 2k = D + 2k \qquad [27]$$

$$m\omega_0{}^2 + 2k = m\frac{g}{L} = D \qquad [28]$$

Durch Einsetzen erhält man

$$K = \frac{k}{\omega_0 + k} \qquad [29]$$

Wenn man die Kreisfrequenz der gleichsinnigen Bewegung wie folgt umschreibt

$$\omega_0^{|} = \sqrt{\omega_0{}^2 + 2\frac{k}{m}} \qquad [30]$$

ergibt sich die folgende dynamische Definition von K:

$$K = \frac{\omega_0^2 - \omega_0^{|2}}{\omega_0^2 + \omega_0^{|2}} = \frac{T_0^2 - T_0^{|2}}{T_0^2 + T_0^{|2}} \qquad [31]$$

Daraus folgt:

$$\frac{\omega_0}{\omega_0^{|}} = \sqrt{\frac{1+K}{1-K}} \qquad [32]$$

Aus diesem Term lässt sich die Frequenzaufspaltung berechnen:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{1+K}{1-K}} - 1 \qquad [33]$$

Für kleine Kopplungsgrade kann mittels der Taylor-Entwicklung genähert werden:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = K + \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{2}K^3 + \ldots \qquad [34]$$

2. Messwerte

2.1 Ungekoppelte Pendel

Die verwendeten Pendel hatten eine gemessene Länge von 1,60±0,10m (relativ große Unsicherheit durch die fehlende Bestimmung des Schwerpunktes) und einen Abstand von ,21±0,002m.

Beim Messen des freien Schwingens (ohne Feder) ergaben sich folgende Werte:

Pendel 1			Pendel 2		
Anzahl Schwingungen	Zeit [s]	Schwingungs-dauer [s]	Anzahl Schwingungen	Zeit [s]	Schwingungs-dauer [s]
20	48,5	2,415	20	49,6	2,480
20	49,3	2,465	20	48,7	2,435
20	49,7	2,485	20	49,5	2,475
20	49,5	2,475	20	49,7	2,485
20	49,5	2,475	20	49,3	2,465
Mittelwert		2,465	Mittelwert		2,468
Standartabweichung		0,023	Standartabweichung		0,020
Meßunsicherheit		±0,010	Meßunsicherheit		±0,009

Als Ungenauigkeit für die Zeitmessungen kann approximativ ±0,1s angegeben werden. Aufgrund der Zahl der Schwingungen reduziert sich diese beim errechneten Wert der Schwingungsdauer auf ±5ms. Sie liegt also unter der Meßunsicherheit und wird im folgenden nicht mehr berücksichtigt (sie ist in gewisser Weise sowieso in der Meßunsicherheit enthalten).

Für beide Pendel erhält man bei Rundung den gleichen Wert: 2,47±0,03s

2.2 Gekoppelte Pendel

1. Kopplung (Abstand der Kopplung von den Pendeln = 0cm±0,5cm)					
Auslenkung Pendel 1 [cm]	Auslenkung Pendel 2 [cm]	Kopplungsgrad *K*	T_{geg} [s]	T_{gl} [s]	T_s [s]
4	1,8	0,450	1,615	9,6	9,6
7	3	0,429	1,53	10	10
10	4,3	0,430	1,6	9,5	9,5
12	5	0,417	1,595	9,6	9,6
17	6,8	0,400	1,575	9,7	9,7
Mittelwert		0,425	0,425	2,431	9,680
Standartabweichung		0,018	0,018	0,025	0,192
Meßunsicherheit		±0,008	±0,008	±0,011	±0,086

Für die 1. Kopplung ergeben sich folgende Werte:

- Der Kopplungsgrad *K* beträgt 0,425±0,01
- Die antisymmetrische Schwingungsdauer der Pendel T_{geg} beträgt 1,58±0,02s.
- Die symmetrische Schwingungsdauer T_{gl} beträgt 2,43±0,01s.
- Die Schwingungsdauer der Schwebung T_s beträgt 9,7±0,1s.

2. Kopplung (Abstand der Kopplung von den Pendeln = 20cm±0,5cm)					
Auslenkung Pendel 1 [cm]	Auslenkung Pendel 2 [cm]	Kopplungsgrad *K*	T_{geg} [s]	T_{gl} [s]	T_s [s]
4	1,5	0,375	1,78	2,425	11,6
8	2,9	0,363	1,775	2,415	13
11	3,8	0,345	1,785	2,455	10,2
15	5	0,333	1,75	2,435	12,2
18	6	0,333	1,81	2,365	12,2
Mittelwert		0,350	1,780	2,419	11,840
Standartabweichung		0,018	0,022	0,034	1,043
Meßunsicherheit		±0,01	±0,010	±0,015	±0,466

Für die 2. Kopplung ergeben sich folgende Werte:

- Der Kopplungsgrad *K* beträgt 0,35±0,1
- Die antisymmetrische Schwingungsdauer der Pendel T_{geg} beträgt 1,78±0,01s.
- Die symmetrische Schwingungsdauer T_{gl} beträgt 2,42±0,02s.
- Die Schwingungsdauer der Schwebung T_s beträgt 11,8±0,5s.

3. Kopplung (Abstand der Kopplung von den Pendeln = 40cm±0,5cm)					
Auslenkung Pendel 1 [cm]	Auslenkung Pendel 2 [cm]	Kopplungsgrad *K*	T_{geg} [s]	T_{gl} [s]	T_s [s]
4	1,2	0,300	1,925	2,37	16,8
8	2,2	0,275	1,89	2,405	17,6
12	3,2	0,267	1,84	2,37	17,2
16	4,1	0,256	1,925	2,43	16,7
20	5	0,250	1,915	2,435	17,2
Mittelwert		0,270	0,325	2,402	17,100
Standartabweichung		0,020	0,052	0,031	0,361
Messunsicherheit		±0,009	±0,023	±0,014	±0,161

Für die 3. Kopplung ergeben sich folgende Werte:

- Der Kopplungsgrad *K* beträgt 0,27±0,01
- Die antisymmetrische Schwingungsdauer der Pendel T_{geg} beträgt 1,90±0,02s.
- Die symmetrische Schwingungsdauer T_{gl} beträgt 2,40±0,01s.
- Die Schwingungsdauer der Schwebung T_s beträgt 17,1±0,2s.

Auswertung

Zu 3a)

Die geforderten Kopplungsgrade k_{st} wurden bereits im Zuge der Messungen ermittelt. Die Messunsicherheit wurde mittels der Standardabweichung *s* und der Zahl der Stichproben *n* mittels der üblichen Formel für die Messunsicherheit ermittelt: $u = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Zu 3b)

Die Schwebungsdauer errechnet sich nach [23a]:

	errechnete T_S [s]	gemessene T_S [s]
Kopplung 1	9,1±0,2s	9,7±0,1s
Kopplung 2	13,5±0,2s	11,8±0,5s
Kopplung 3	18,1±0,3s	17,1±0,2s

Zur Ermittlung der Messunsicherheit der errechneten Werte wurde die prozentuale Messunsicherheit der beiden eingehenden Werte T_{gl} und T_{geg} addiert.
Die Differenz zwischen Sollwert und Istwert ist wohl vor allem auf die Tatsache zurückzuführen, dass nicht beim Messen der Schwebung nicht beide Pendel exakt gleichzeitig losgelassen werden konnten.

Zu 4a)

Aus [23a] läßt sich die Formel für die Frequenzabweichung ableiten:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_0 - \sqrt{{\omega_0}^2 + 2\frac{k}{m}}}{\omega} = \frac{4\pi}{T_S\,\omega} \qquad [34]$$

Für die drei Kopplungen ergeben sich folgende Werte für die relative Frequenzaufspaltung (die angegebenen Größtfehler wurden mittels Addition der Messunsicherheiten von T_S und w ermittelt):

1. Kopplung: 0,53±0,01
2. Kopplung: 0,44±0,02
3. Kopplung: 0,31±0,01

Zu 4b)

Im Diagramm 1 (s. Anhang) wurden die Wertepaare (K_{st}, Dw/w) angetragen und zusätzlich der Graph der Funktion [33] für die relative Frequenzaufspaltung angetragen. Die Wertepaare gruppieren sich weitgehend um den Graphen, der theoretische Zusammenhang ist also zutreffend.

Zu 4c)

Kopplungsgrad K	Frequenzaufspaltung: Nach Gleichung [33]	Frequenzaufspaltung: Entwicklung 5. Ordnung nach Gleichung [34]	Prozentualer Fehler
0,10	0,106	0,106	0%
0,15	0,163	0,163	0%
0,20	0,225	0,225	-0,1%
0,25	0,291	0,292	-0,2%
0,30	0,363	0,364	-0,3%
0,35	0,441	0,443	-0,4%
0,40	0,528	0,530	-0,5%
0,45	0,624	0,627	-0,5%
0,50	0,732	0,734	-0,3%
0,55	0,856	0,855	0,1%
0,60	1,000	0,992	0,8%
0,65	1,171	1,146	2,2%
0,70	1,380	1,321	4,5%
0,75	1,646	1,519	8,3%
0,80	2,000	1,745	14,6%
0,85	2,512	2,001	25,5%
0,90	3,359	2,293	46,5%
0,95	5,245	2,624	99,9%

Ab einem Kopplungsgrad von 0,8 ist die Abweichung der Taylorentwicklung größer als 10%. Die Entwicklung ist also für die gemessenen Werte nützlich, da der höchste Kopplungsgrad (um 0,4) nur 0,5% abweicht. Im Diagramm 1 ist die geringe Abweichung der Reihenentwicklung gut ablesbar.

Anhang: Diagramm 1