

Versuchsprotokoll

E1 – Gleich- und Wechselstrom

Protokollanten: Malte Renius, Inga Zeismann
Versuchsleiter: Marcus Schäfer

1. Einleitung

In der folgend beschriebenen Messreihe soll das Verhalten und die damit verbundenen physikalischen Eigenschaften von Spannungsquellen, Widerständen, Spulen und Kondensatoren eingegangen werden.

Besondere Beachtung findet das unterschiedliche Verhalten der oben beschriebenen Elemente bei Gleich- und Wechselstrom.

2. Theorie

2.1 Widerstände

Das Verhalten von Widerständen wird bei den Versuchen als „ohmsch“ angenommen, d.h. die jeweiligen Widerstände sind durch einen konstanten Quotienten (Spannung pro Strom) charakterisiert. Aus dieser, in dem Ohmschen Gesetz ausgedrückten, Proportionalität ergibt sich ein Proportionalitätsquotient, der sog. Ohmsche Widerstand: $R = \frac{U}{I}$.

Aus den Kirchhoffschen Regeln lässt sich der Gesamtwiderstand eines Systems von parallel bzw. seriell geschalteten Widerständen berechnen. Aus dem 1. KR (sog Knotenregel)

$$\sum_k I_k = 0 \text{ ist dabei das Gesetz für parallel geschaltete Widerstände } \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{ges}} \quad (1)$$

abzuleiten, aus dem 2. KR (sog. Maschenregel $\sum U_i = 0$) kann das Gesetz für seriell geschaltete Widerstände $R_1 + R_2 = R_{ges}$ hergeleitet werden.

2.2 Spannungsquellen

Spannungsquellen wird ein Innenwiderstand R_i zugeordnet, der den Spannungsabfall bei erhöhter Leistung umschreibt. Dieser Widerstand folgt theoretisch dem Ohmschen Gesetz,

d.h. die abgegebene Leistung einer Spannungsquelle ergibt sich aus $P = U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2}$. Die

Leistung kann aufgrund des Innenwiderstands im Nenner nicht unendlich werden.

Als sog. „Leistungsanpassung“ einer Stromquelle bezeichnet man die Wahl des R_a , bei dem die maximale Leistung an diesem abgegeben wird. Den optimalen R_a findet man über die obenstehende Formel, bei der P maximal werden muss. Dabei wird nur nach dem Bruch

abgeleitet, da U_0 konstant ist: $\frac{R_a}{(R_a + R_i)^2} \frac{d}{dR_a} = \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_a + R_i} \right) \Rightarrow R_a = \frac{1}{2} (R_a + R_i)$

$\Rightarrow R_a = R_i$. Die Leistungsabgabe ist maximal, wenn der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand ist.

2.3 Kondensatoren

Kondensatoren verhalten sich bei paralleler bzw. serieller Schaltung genau umgekehrt wie Widerstände.

Herleitung: Bei parallel geschalteten Kondensatoren muss die Spannung zwischen den Platten von C_1 gleich der Spannung zwischen den Platten von C_2 sein. Dies ist auch die Spannung der Stromquelle. Aus $Q = Q_1 + Q_2 = C_1U + C_2U = CU$ folgt, wenn man die Spannung in den letzten beiden Termen kürzt: $C = C_1 + C_2$. Bei seriell geschalteten Widerständen

gilt $U_1 + U_2 = U$. Beide Kondensatoren müssen die gleiche Ladung haben, da zwischen den beiden die Ladung erhalten bleiben muss. Daher ergibt sich $U_1 + U_2 = Q \cdot (C_1^{-1} + C_2^{-1})$ und

schließlich $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

2.4 Wechselstrom

In den folgenden Experimenten wird ausschließlich eine Form des Wechselstroms verwendet, welcher eine harmonische Schwingung ausführt: $U = U_0 \cdot \sin \omega t$

Bei Wechselstrom verhalten sich ohmsche Widerstände analog bei im Gleichstrom, während Spulen und Kondensatoren, die im Gleichstrom entweder einen vernachlässigbar kleinen (Spule) oder unendlich hohen (Kondensator) Widerstände haben, durch den Wechselstrom einen Scheinwiderstand bzw. eine Impedanz erhalten.

Die Formel für die Impedanz lässt sich aus dem Spannungsabfall an den jeweiligen

Elementen ableiten: ohmscher Widerstand $U_R = RI$, Spule $U_L = L \frac{dI}{dt}$;

Kondensator $U_C = \frac{1}{C} \int Idt$.

An einer Reihenschaltung der drei Elemente fällt demnach die Spannung

$U_{ges} = \frac{R}{I} + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt$ ab. Die dazugehörige Stromstärke $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ schwingt mit identischer Kreisfrequenz ω , allerdings weichen Amplitude I_0 und Phase φ von der Spannung ab.

Am günstigsten lässt sich die Differentialgleichung im Komplexen lösen, da hier die Sinusfunktion durch die problemlos ableitbare Exponentialfunktion zu ersetzen ist. Für die Funktion der Spannung ergibt sich daher: $\bar{U} = R\bar{I} + i\omega L\bar{I} + \frac{1}{i\omega C}\bar{I}$. Die Faktoren vor der Stromstärke stellen die jeweiligen komplexen Impedanzen Z_R , Z_L und Z_C dar, die sich in einer Gesamtimpedanz Z zusammenfassen lassen. Bei der Transformation in Polarschreibweise taucht die Phasenverschiebung φ als Argument der Exponentialfunktion auf: $\bar{U} = |Z| \cdot e^{i\varphi} \cdot \bar{I}$. Dabei ist der Betrag der komplexen Impedanz der sog. Scheinwiderstand. Die Rücktransformation ins Reelle ergibt dabei $U_o \sin(\omega t + \varphi_U) = |Z|I_o \sin(\omega t + \varphi_I + \varphi)$. Die Phasenverschiebung φ lässt sich dabei aus einem reellen Lösungsansatz gewinnen:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (1).$$

Beispiel: Eine Serienschaltung von einem Widerstand mit 100Ω , einer Spule mit $300\mu\text{H}$ und einem Kondensator mit 4nF hätte eine Phasenverschiebung von $-89,99^\circ$ und einen Scheinwiderstand von 795774Ω . Der hohe Widerstand ergibt sich durch die kleine Kapazität des Kondensators.

3. Messwerte der Experimente, Bemerkungen zur Messunsicherheit, Auswertungen

Aufgabe 1

- Messung der Klemmenspannung U_{KI} in Abhängigkeit vom Strom (Die Stromstärke wurde mangels eines Ampèremeters anhand der Spannung und dem Widerstand berechnet).

Messwerttabelle:

R_A (Ω)	U_{KI} (V); 1 Akku	I (A); 1 Akku	U_{KI} (V); 3 Akkus par.	I (A); 3 Akkus par.	U_{KI} (V); 3 Akkus ser.	I (A); 3 Akkus ser.
∞	$U_0=1,37$	0	$U_0=1,37$	0	$U_0=3,88$	0
2000	1,32	0,00066	1,35	0,00067	4,10	0,0021
1000	1,31	0,0013	1,33	0,0013	3,70	0,0037
500	1,28	0,0025	1,32	0,0026	3,47	0,0069
200	1,15	0,0057	1,29	0,0064	2,65	0,013
100	1,00	0,010	1,24	0,012	2,00	0,020
50	0,80	0,016	1,12	0,022	1,33	0,026
20	0,50	0,025	0,94	0,047	0,68	0,034
10	0,30	0,03	0,75	0,075	0,46	0,046
5	0,18	0,036	0,59	0,12	0,29	0,058
4	0,15	0,038	0,55	0,14	0,25	0,063
3	0,115	0,038	0,50	0,17	0,24	0,080
2	0,090	0,045	0,45	0,23	0,20	0,10
1	0,050	0,050	0,38	0,38	0,18	0,18
0,5	0,030	0,060	0,33	0,66	0,15	0,30
0	0	nicht messbar	0	nicht messbar	0	nicht messbar

Zur Messunsicherheit

Die Messunsicherheit für U_{KI} wurde aufgrund der Skaleneinteilung des Messgerätes auf $\pm 0,01V$ angesetzt. Für R_A wird eine –im Vergleich zu vernachlässigbar kleine

Messunsicherheit angenommen. Die Stromstärke I wird aus dem Quotienten $\frac{U}{R}$ berechnet,

also addieren sich laut dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz die Messunsicherheiten der beiden Größen. Da die Unsicherheit von R_A vernachlässigt werden kann, wird für I die

Unsicherheit von U_{KI} übernommen. Diese entspricht in etwa 1%. Bei einem maximalen I von 0,3 A lässt sich die Unsicherheit bei der Stromstärke auf $\pm 0,003A$ ansetzen.

Der zu ermittelnde Innenwiderstand eines Akkus variiert offenbar mit der Leistung:

$R_a (\Omega)$	$U_{KI} (V); 1 \text{ Akku}$	$I (A); 1 \text{ Akku}$	$R_i (\Omega)$
2000	1,32	0,00066	75
1000	1,31	0,0013	45
500	1,28	0,0026	35
1	0,050	0,0500	26

Die Tabelle zeigt den Innenwiderstand berechnet nach $R_i = \frac{U_o - U_{KI}}{I}$ (1)

Aus den Diagrammen lassen sich jedoch Werte für die Innenwiderstände der drei Akku-Schaltungen entnehmen, die über weite Strecken konstant sind:

In den ersten beiden Diagrammen (siehe Anhang) in denen die U-I-Kennlinie dargestellt wird (1 Akku, 3 Akkus seriell). Die Kennlinie endet bei der Y-Achse bei ca. 0,04A und auf der x-Achse bei 1,35V (1 Akku) bzw. 4,35V (beide Werte entsprechen auch in etwa der Leerlaufspannung).

Aus diesen Werten ergeben sich anhand der obigen Formel (1) folgende Innenwiderstände:

$$R_i(1 \text{ Akku}) = 33,75\Omega \pm 0,7\Omega$$

$$R_i(3 \text{ Akku seriell}) = 108,75\Omega \pm 2,2\Omega (\text{ca. } 3 \times 33,75\Omega)$$

Als Messunsicherheiten sind, dem Gaußschen Gesetz folgend, bei den obigen Werten 2% angesetzt, tatsächlich liegt jedoch offensichtlich ein größerer Fehler vor, wie der Tatsache zu entnehmen ist, dass der dreifache Innenwiderstand des einzelnen Akkus eigentlich in der Toleranz des Wertes für die serielle Schaltung liegen müsste.

$$R_i(3 \text{ Akku parallel}) = 9\Omega \pm 0,09\Omega$$

Der Innenwiderstand der Parallelschaltung ist dem Diagramm nur schwer zu entnehmen, da die Relation von Stromstärke und Spannung bei sehr hohen Stromstärken nicht mehr gegeben ist. Das durch das Steigungsdreieck ermittelte Ergebnis entspricht jedoch ungefähr dem Erwartungswert in der Theorie (Gleichung 1 in 2.1).

Aufgabe 2:

Im Rahmen einer Messunsicherheit von 2% (infolge des Produkts $U \cdot I$ addieren sich die möglichen Größtfehler). Die folgende Tabelle zeigt die rein rechnerisch ermittelten Werte ohne diese Fehlerangabe. Im Diagramm wurde als Messunsicherheit 2% angesetzt.

U_a (Ω)	P (W); 1 Akku	P (W); 3 Akkus par.	P (W); 3 Akkus ser.
2000	0,00087	0,00091	0,0084
1000	0,0017	0,0018	0,014
500	0,0033	0,0035	0,024
200	0,0066	0,0083	0,035
100	0,010	0,015	0,040
50	0,013	0,025	0,035
20	0,013	0,044	0,023
10	0,0090	0,056	0,021
5	0,0064	0,070	0,017
4	0,0056	0,076	0,016
3	0,0044	0,083	0,019
2	0,0041	0,10	0,020
1	0,0025	0,14	0,032
0,5	0,0018	0,21	0,045

Im Diagramm ist die Leistungsanpassung bei der Schaltung „1 Akku“ und „3 Akkus seriell“ recht gut zu erkennen: Das Maximum liegt in etwa bei 30Ω bzw. 90Ω . Für die parallele Schaltung lässt sich aus dem Diagramm kein Maximum entnehmen, da die Leistung analog zur Tabelle bis zum Widerstand von $0,5\Omega$ ansteigt. Die Leistung steigt also sogar noch jenseits des Innenwiderstandes $9\Omega \pm 0,09\Omega$.

Zur Zusatzfrage:

Bei einer Stromquelle sollte $I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$ konstant sein. Bei $R_i \gg R_a$ ist R_a vernachlässigbar,

d.h. die Stromstärke bleibt weitgehend konstant. Einen geringen Innenwiderstand erreicht man durch Serienschaltung von Stromquellen bzw. einen Vorwiderstand.

Bei einer Spannungsquelle sollte $U_a = U_0 - R_i \cdot I$ konstant sein. Dies ist durch einen besonders geringen Innenwiderstand R_i erreichbar. Dieser ist durch eine Parallelschaltung von Stromquellen erreichbar.

Aufgabe 4

Das Voltmeter zeigte bei Gleichstrom eine Spannung von 23,5V, bei Wechselstrom eine Spannung von 24V, d.h. bei Gleichspannung fallen 0,5V an dem Innenwiderstand der Stromquelle ab. Da der sowohl Innenwiderstand der Stromquelle als auch die Stromstärke nicht bekannt ist, kann die Leistung des Voltmeters nicht ermittelt werden. Der Messunterschied von ca. 2% muss bei der den Messungen wohl nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 5

Messergebnisse von I bei $R=30\Omega$ und veränderlicher Spannung					Theoretische Werte bei 30W ($I=U/R, P=UI$)	
U (V)	I – (A)	P – (W)	I ~ (A)	P ~ (W)	I (A)	P (W)
23,1	0,76	17,1	0,72	18	0,77	17,8
20,1	0,68	13	0,633	13,7	0,67	13,5
17	0,59	8,9	0,54	9,5	0,567	9,63
15	0,535	7,2	0,49	7,5	0,50	7,5
12,5	0,46	4,8	0,42	5,2	0,42	5,21

Bei den Messungen wurde aufgrund der Skaleneinteilung auf den Messgeräten eine Messungenauigkeit von 2% angenommen, welche in dem Diagramm eingezeichnet ist.

Die beiden U-I-Kennlinien sind im Diagramm parallel, stellen jedoch in beiden Fällen keine Ursprungsgeraden dar. Die Steigung entspricht $35\Omega \pm 0,7\Omega$.

Die P-U*I-Kennlinie ist ebenfalls keine Ursprungsgerade. Die Wechselstrom-Kennlinie kommt dem Idealergebnis (Ursprungsgerade mit 45° Steigung) näher, vermutlich, weil die Spulen der Messgeräte im Wechselstrom einen höheren Widerstand haben und somit weniger Ungenauigkeit erzeugen.

Aufgabe 6

U ~ (V)	I ~ (A)	P ~ (W)	φ	Z
23,1	0,78	15	33,6°	29,6
20,1	0,69	11,9	30,9°	29,1
17	0,58	8,2	33,7°	29,3
15	0,53	6,8	31,2°	28,3
12,5	0,44	4,9	27,2°	28,4

Der Phasenwinkel φ wurde anhand der Formel $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ errechnet. Als Mittelwert der Phasenwinkel φ ergibt sich $31,3^\circ$ mit der Standardabweichung $2,6^\circ$. Es liegt also eine Messunsicherheit von $\pm 1,2^\circ$ vor.

Der Wirkwiderstand der Schaltung ergibt sich aus der Formel $R_W = |Z| \cdot \cos\varphi$. Bei |Z| liegt der Mittelwert $29,0\Omega$ mit einer Messunsicherheit von $0,3\Omega$ vor. Für das Ergebnis für R_W ergibt sich folglich der Wert $24,8\Omega \pm 1,0\Omega$

Aufgabe 7

U (V)	I - (A)	P - (W)	R (Ω)
23,1	0,98	23	23,6
20,1	0,86	17,5	23,3
17	0,74	12,5	23,0
15	0,653	9,5	22,9
12,5	0,558	6,5	22,4

Aus dem Diagramm lässt sich ein Vorwiderstand von $26\Omega \pm 0,5\Omega$ entnehmen.

Die Induktivität der Spule lässt sich somit aus der Formel $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ berechnen, da |Z|, ω und R bekannt sind. Es ergibt sich eine Induktivität von $3,6 \pm 0,1\text{mH}$ (Die 3% Unsicherheit ergeben sich durch die Addition der Unsicherheiten von R und |Z|).

Aufgabe 8

U (V)	I (A)	P (W)	Z
23	0,59	9,1	39,0
20	0,53	7,1	37,7
17	0,50	5,0	34,0
15	0,40	4,0	37,5
12,5	0,34	2,9	36,8

|Z| wurde in der Tabelle durch Division von U und I errechnet.

Für |Z| ergibt sich der Mittelwert $37,0\Omega \pm 0,8\Omega$. Die Messunsicherheit ergibt sich aus der Standardabweichung dividiert durch die Quadratwurzel der Anzahl der Stichproben.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

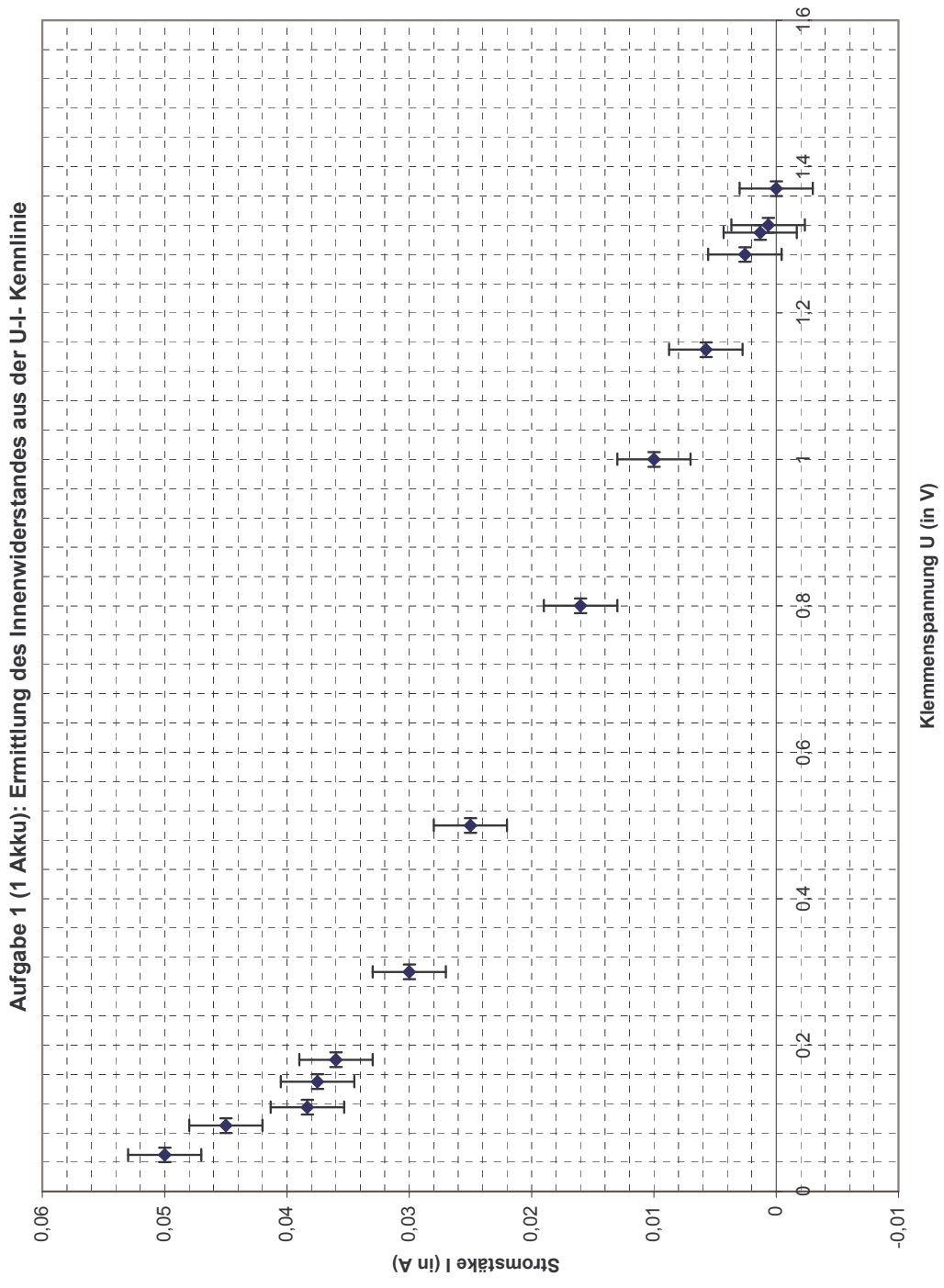
Geg.: |Z| = $37,0\Omega \pm 0,8\Omega$, R = $26\Omega \pm 0,5\Omega$, L = $3,6 \pm 0,1\text{mH}$.

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L + \omega \sqrt{Z^2 - R^2}} = 116\mu\text{F} \pm 8,0\mu\text{F} \text{ laut Messwerten (Die Messunsicherheit der drei}$$

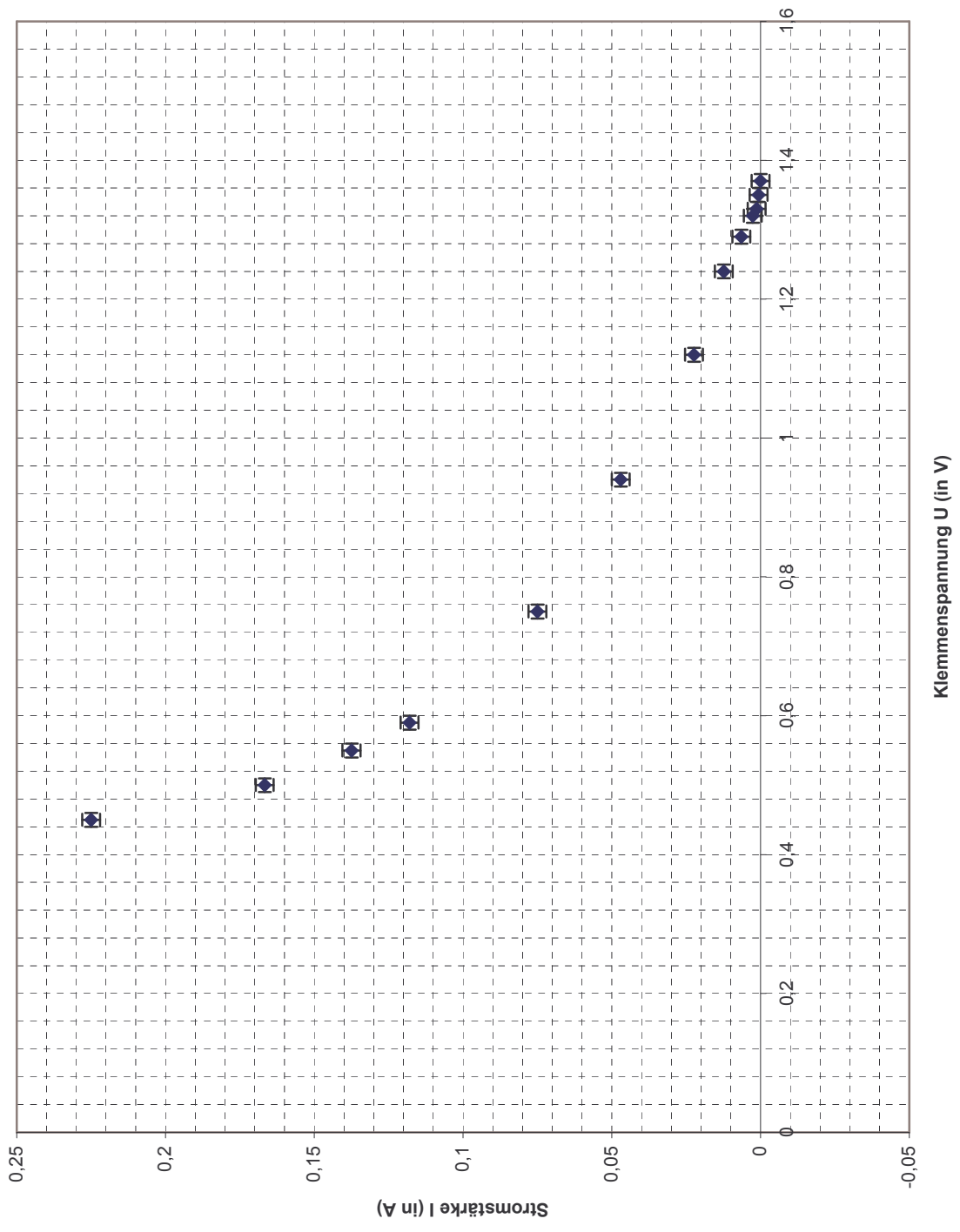
gegebenen Größen wurde addiert). Der Kondensator war eine Parallelschaltung von zwei Kondensatoren mit einer Nennkapazität von $32\mu\text{F}$; er besitzt also eine Nennkapazität von $64\mu\text{F}$. Die große Abweichung lässt sich nicht eindeutig klären. Eventuell ist sie durch den erheblich größeren komplexen Widerstand des Kondensators begründet, der den 25fachen Betrag des komplexen Widerstandes der Spule hat.

Die Phase beträgt (nach 2.4, Gleichung 1) $315^\circ \pm 16^\circ$ (Als Messunsicherheit wurde wie bei der Kapazität 5% angesetzt).

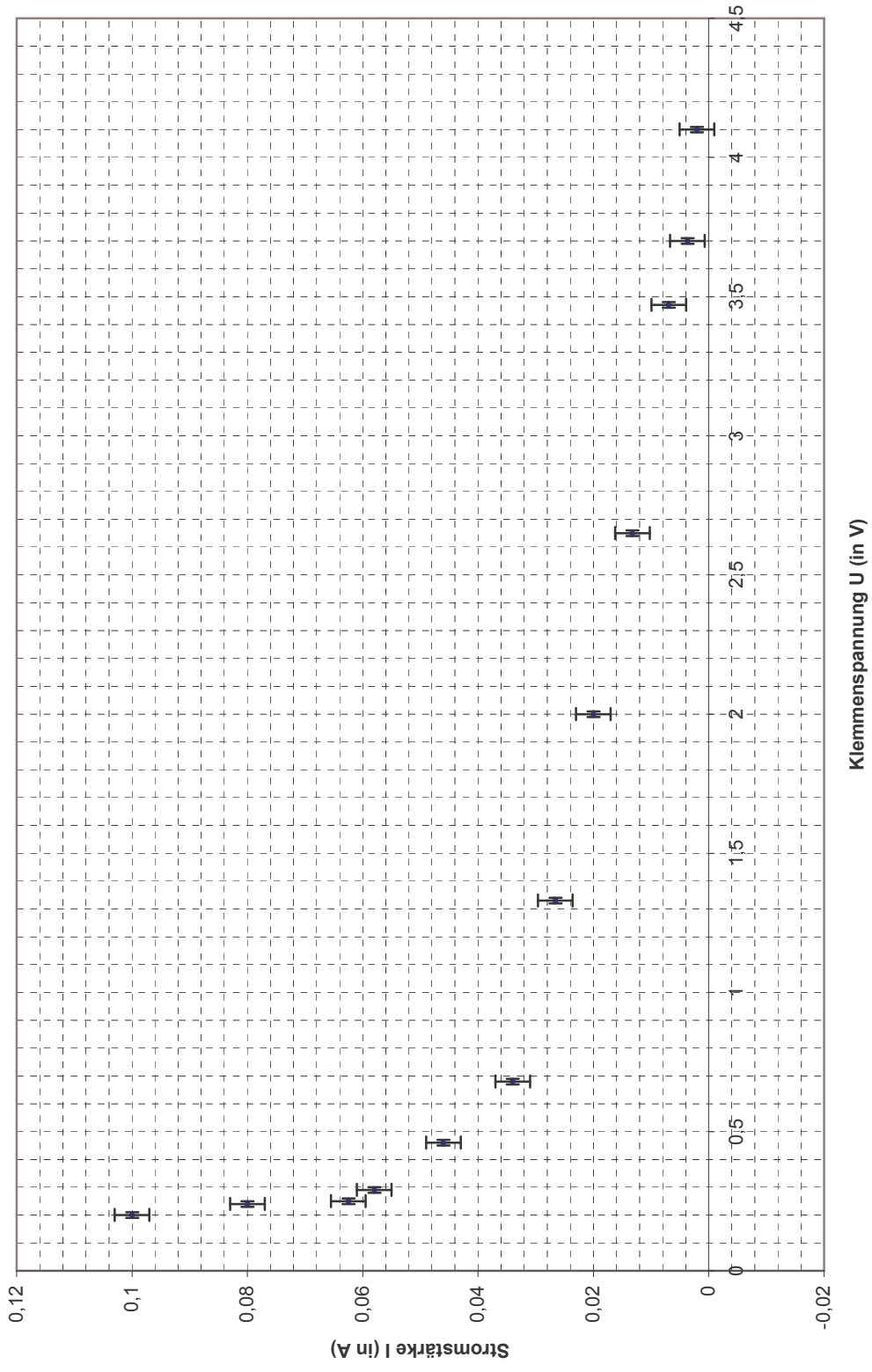
Anhang: Diagramme



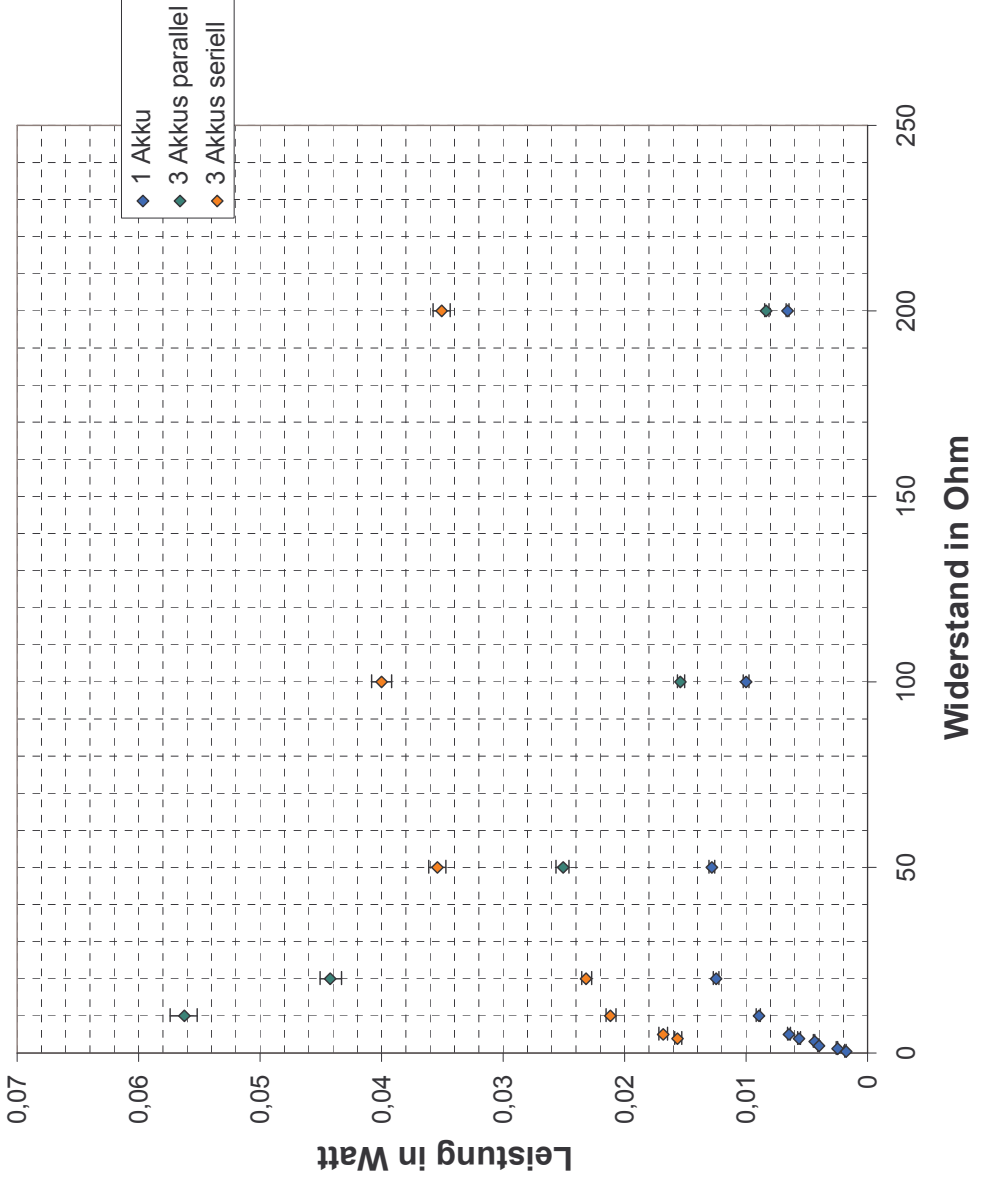
Aufgabe 1 (3 Akku parallel): Ermittlung des Innenwiderstandes aus der U-I-Kennlinie



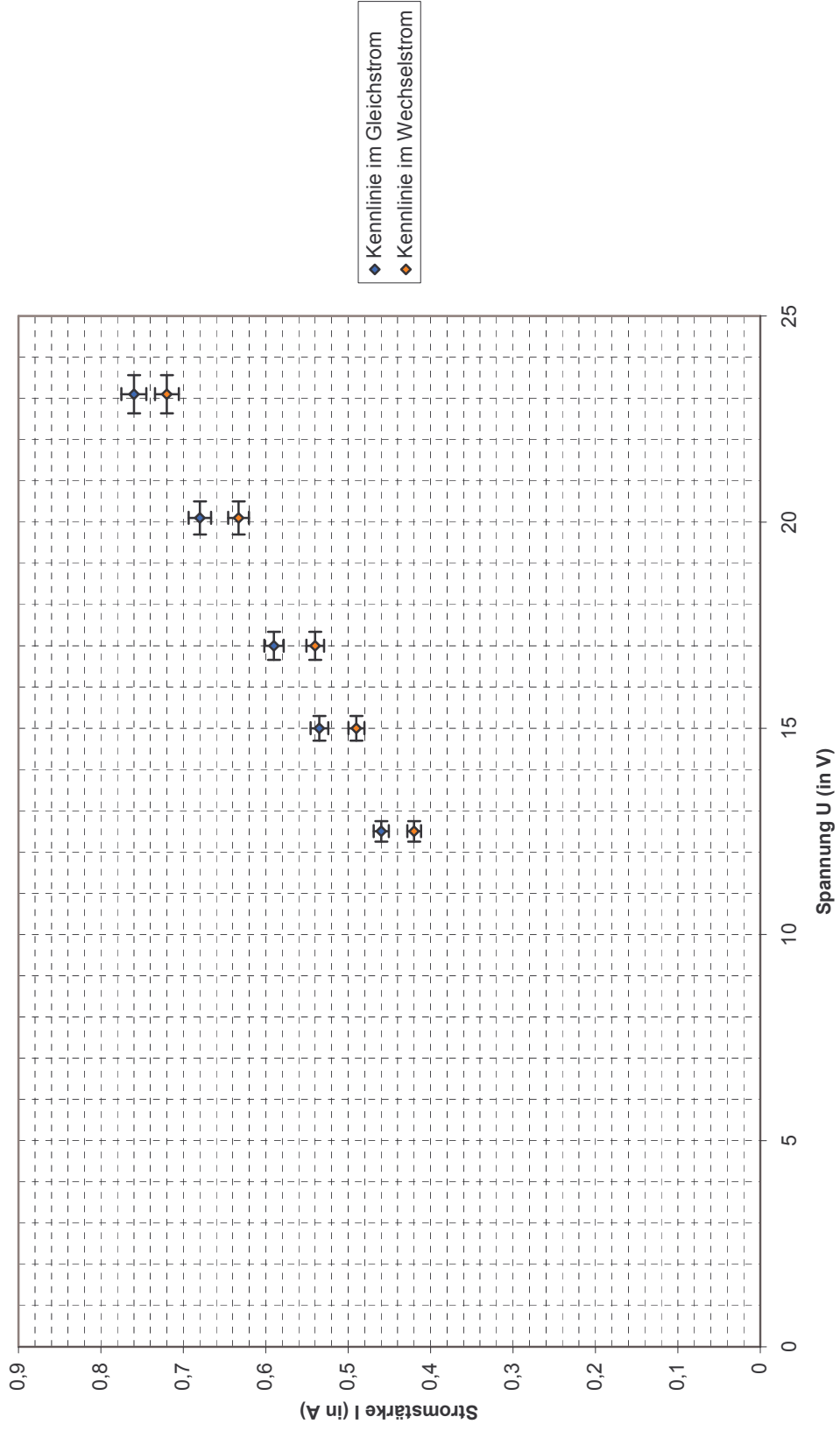
Aufgabe 1 (3 Akkus seriell): Ermittlung des Innenwiderstandes aus der U-I-Kennlinie



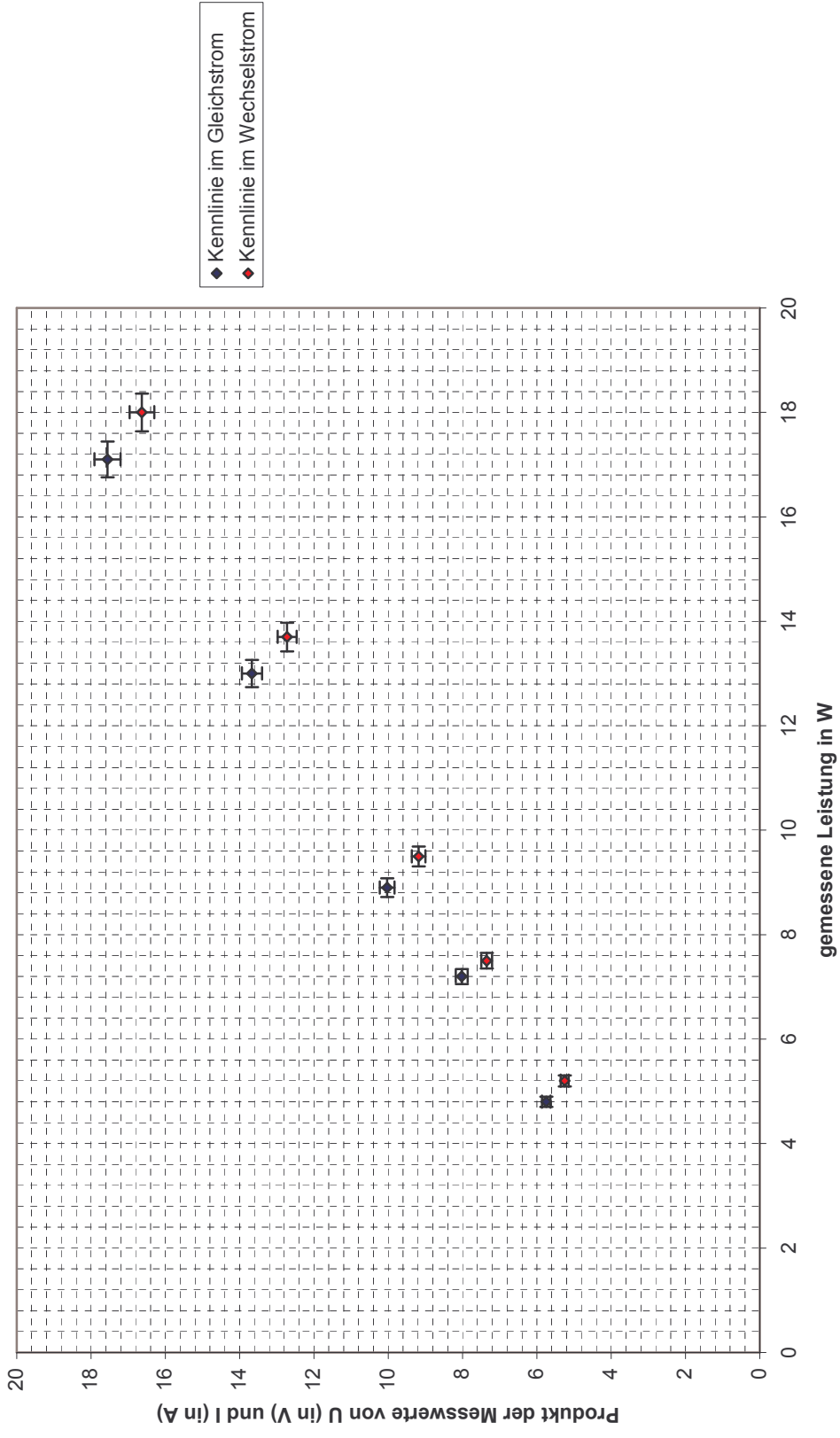
Aufgabe 2: Leistungsanpassung



Aufgabe 5: U-I-Kennlinie in Gleich- und Wechselstrom



Aufgabe 5: Kennlinie von den Messwerten P zu U^*I in Gleich- und Wechselstrom



Aufgabe 7: Ermittlung des Vorwiderstandes der Spule durch Anlegen von Gleichstrom

